Utdanningsdirektoratet

Eksamen

30.11.2012

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (2 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = e^x \cdot \cos x$

b) $g(x) = 5(1+\sin x)^3$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Bestem integrala

a) $\int \cos x \cdot (1+\sin x)^3 \, dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgåve 3 (4 poeng)

Vi har gitt punkta $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 5)$ og $C(3, 7, 3)$.

a) Undersøk om $\triangle ABC$ er rettvinkla.

b) Bestem koordinatane til eit punkt D slik at $\square ABCD$ blir eit parallellogram.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Vi har gitt differensiallikninga

$y'' - y = 0$ der y er ein funksjon av x.

a) Vis at $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ er løysing av differensiallikninga, når C_1 og C_2 er konstantar.

b) Bestem C_1 og C_2 når $y(0) = 5$ og $y'(0) = -1$

Oppgåve 5 (2 poeng)

Vi har gitt den uendelege rekkja

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Forklar at rekkja konvergerer, og bestem summen av rekkja.

Oppgåve 6 (2 poeng)

Ein periodisk funksjon f er gitt på forma

$$f(x)=a\sin(cx+\varphi)+d$$

Grafen til f går gjennom punktet $A(0, 5)$, han har botnpunkt i $B(3, 2)$ og toppunkt i $T(5, 8)$. Det er ingen andre ekstremalpunkt i intervallet $\langle 3, 5\rangle$.

Bestem verdiar for konstantane a, c, φ og d.

Oppgåve 7 (3 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$$

a) Bestem eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

b) Teikn ei skisse av grafen til f.

Oppgåve 8 (3 poeng)

Bevis påstanden ved induksjon

$$P(n):\ 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+n\cdot(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (7 poeng)

Ein funksjon er gitt ved

$$f(x) = 8\,\mathrm{e}^{-x} \cdot \sin 2x$$

a) Teikn grafen til f, og bestem eventuelle null-, topp-, botn- og vendepunkt når $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

I ei formelsamling for matematikk finn vi formelen

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{ax} \cdot \sin bx \; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a \sin bx - b \cos bx) + C}$$

b) Bruk formelen til å bestemme $\int f(x)\; \mathrm{d}x$
Kontroller svaret ved derivasjon.

c) Bestem det samla arealet av områda som er avgrensa av $x-$aksen og grafen til f når $x \in [\,0, \pi\,]$.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Kjelde: blogs.reuters.com (01.06.2012)

Farten v til ein sprintar blir målt i meter per sekund og er ein funksjon av tida t. Tida t er målt i sekund etter start. Farten v er ei løysing av differensiallikninga

$$v' = 12{,}0 - 1{,}15 \cdot v$$

a) Løys differensiallikninga og bestem $v(t)$ når du får vite at $v(0) = 0$

b) Strekninga s blir målt i meter og er definert ved

$$s' = v \text{ og } s(0) = 0$$

Bestem ein formel for $s(t)$.

c) Kor lang tid vil sprintaren bruke på 100 m, ifølgje modellen ovanfor?

Oppgåve 3 (8 poeng)

Gitt vektorane $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Ingen av vektorane er $\vec{0}$.

a) Forklar korleis vektorane ligg i forhold til kvarandre

1) når $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
2) når $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
3) når $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

b) Bruk definisjonen av $\vec{a}\cdot\vec{b}$ og $\vec{a}\times\vec{b}$ til å vise

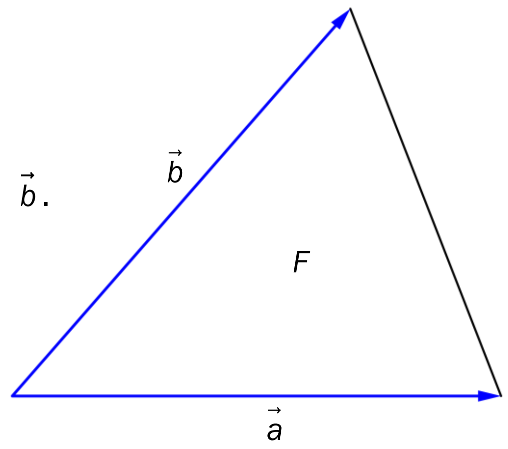
$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

c) Skisse 1 viser ein trekant utspent av vektorane $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Forklar at arealet F av trekanten er

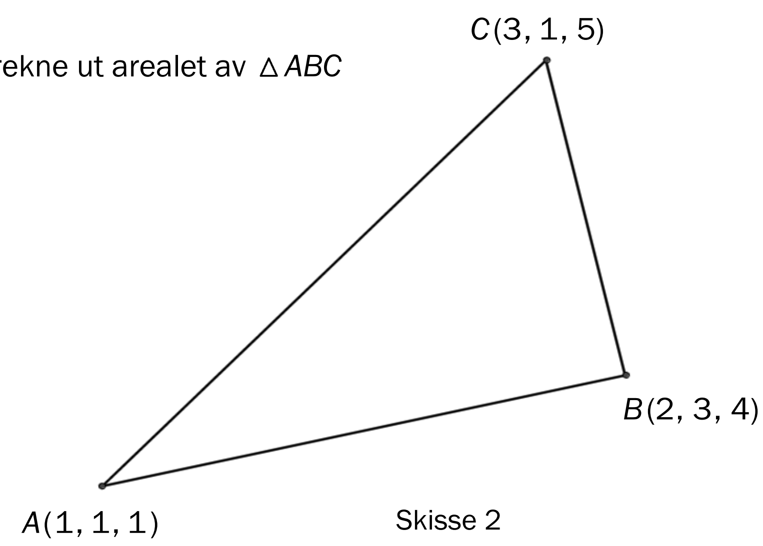
$$F=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

Kommenter kvart av dei to tilfella $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ og $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



Skisse 1

d) Bruk uttrykket i oppgåve c) til å rekne ut arealet av $\triangle ABC$ i skisse 2.



Skisse 2

Oppgåve 4 (4 poeng)

Vi har gitt rekkja

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

a) Bestem eit uttrykk for summen S_n av dei n første ledda, og bestem kor mange ledd vi må ta med for at S_n skal bli 1 600.

Ei uendeleg rekkje er gitt ved

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

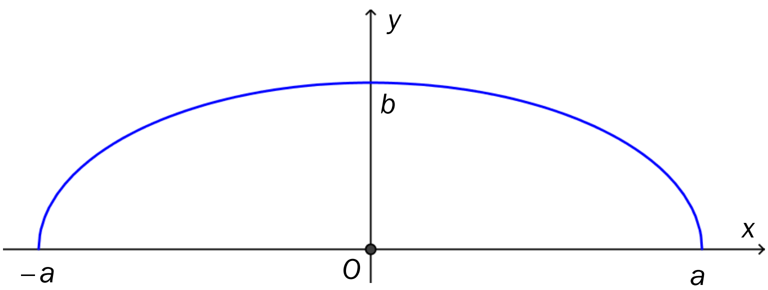
b) Forklar at dette er ei konvergent, geometrisk rekkje. Bestem summen av rekkja.

Oppgåve 5 (4 poeng)

Ein såkalla *ellipse* med sentrum i origo O er gitt ved likninga

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

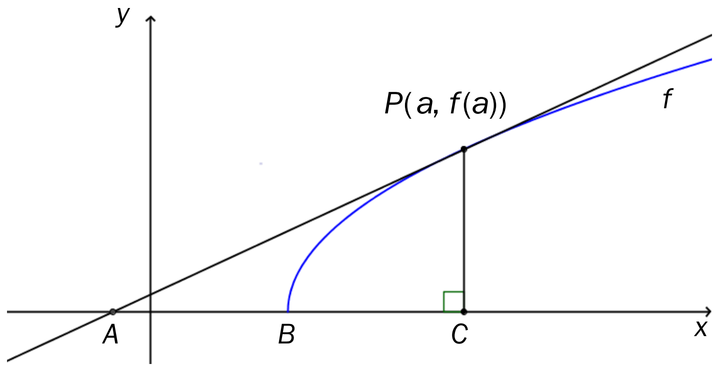
Dersom vi dreier øvre halvdel av ellipsen $360°$ om x–aksen, får vi ein omdreiingslekam som vi kallar ein *ellipsoide*.



a) Vis at likninga for ellipsen kan omformast til $y^2=b^2-\dfrac{b^2x^2}{a^2}$

b) Bruk integrasjon for å vise at formelen for volumet av ellipsoiden er $\dfrac{4}{3}\pi a b^2$

Oppgåve 6 (7 poeng)



Skissa ovanfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

På skissa er det også teikna inn tangenten til grafen i punktet $P(a,\ f(a))$.

a) Vis at likninga til tangenten er

$$y = \frac{1}{2\sqrt{a-2}}x + \frac{a-4}{2\sqrt{a-2}}$$

Bestem koordinatane til punkta A, B og C på figuren.

b) Vis at arealet av området som er avgrensa av grafen til f og x – aksen frå B til C er

$$\frac{2}{3}(a-2)^{\frac{3}{2}}$$

Bestem også arealet av $\triangle ACP$.

c) Grafen til f deler $\triangle ACP$ i to område.
Vis at arealet til det eine området er dobbelt så stort som arealet til det andre.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = e^x \cdot \cos x$

b) $g(x) = 5(1 + \sin x)^3$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \cos x \cdot (1 + \sin x)^3 \, dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

Vi har gitt punktene $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 5)$ og $C(3, 7, 3)$.

a) Undersøk om $\triangle ABC$ er rettvinklet.

b) Bestem koordinatene til et punkt D slik at $\square ABCD$ blir et parallellogram.

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' - y = 0 \quad \text{der } y \text{ er en funksjon av } x.$$

a) Vis at $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ er løsning av differensiallikningen, når C_1 og C_2 er konstanter.

b) Bestem C_1 og C_2 når $y(0) = 5$ og $y'(0) = -1$

Oppgave 5 (2 poeng)

Vi har gitt den uendelige rekken

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Forklar at rekken konvergerer, og bestem summen av rekken.

Oppgave 6 (2 poeng)

En periodisk funksjon f er gitt på formen

$$f(x)=a\sin(cx+\varphi)+d$$

Grafen til f går gjennom punktet $A(0,5)$, den har bunnpunkt i $B(3,2)$ og toppunkt i $T(5,8)$. Det er ingen andre ekstremalpunkter i intervallet $\langle 3,5\rangle$.

Bestem verdier for konstantene a, c, φ og d.

Oppgave 7 (3 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$$

a) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

b) Tegn en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (3 poeng)

Bevis påstanden ved induksjon

$$P(n):\ 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+n\cdot(n+3)=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}\quad,\qquad n\in\mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = 8\,\mathrm{e}^{-x} \cdot \sin 2x$$

a) Tegn grafen til f, og bestem eventuelle null-, topp-, bunn- og vendepunkter når $x \in \langle 0,\, \pi \rangle$.

I en formelsamling for matematikk finner vi formelen

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{ax} \cdot \sin bx \;\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a \sin bx - b \cos bx) + C}$$

b) Bruk formelen til å bestemme $\int f(x)\;\mathrm{d}x$
Kontroller svaret ved derivasjon.

c) Bestem det samlede arealet av områdene som er avgrenset av $x-$aksen og grafen til f når $x \in [\,0,\, \pi\,]$.

Oppgave 2 (6 poeng)

Kilde: blogs.reuters.com (01.06.2012)

Farten v til en sprinter måles i meter per sekund og er en funksjon av tiden t. Tiden t er målt i sekunder etter start. Farten v er en løsning av differensiallikningen

$$v' = 12{,}0 - 1{,}15 \cdot v$$

a) Løs differensiallikningen og bestem $v(t)$ når du får vite at $v(0) = 0$

b) Strekningen s måles i meter og er definert ved

$$s' = v \quad \text{og} \quad s(0) = 0$$

Bestem en formel for $s(t)$.

c) Hvor lang tid vil sprinteren bruke på 100 m, ifølge modellen ovenfor?

Oppgave 3 (8 poeng)

Gitt vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Ingen av vektorene er $\vec{0}$.

a) Forklar hvordan vektorene ligger i forhold til hverandre

1) når $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
2) når $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
3) når $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

b) Bruk definisjonen av $\vec{a}\cdot\vec{b}$ og $\vec{a}\times\vec{b}$ til å vise

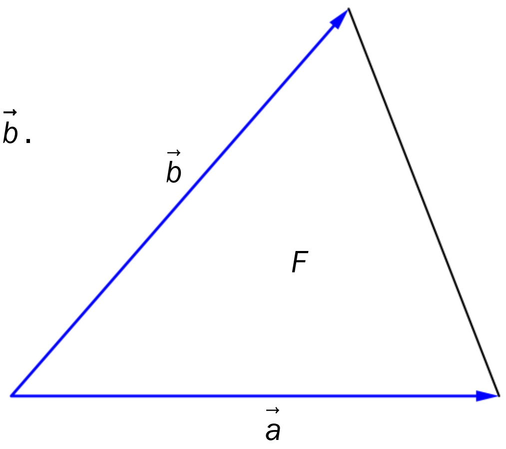
$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

c) Skisse 1 viser en trekant utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Forklar at arealet F av trekanten er

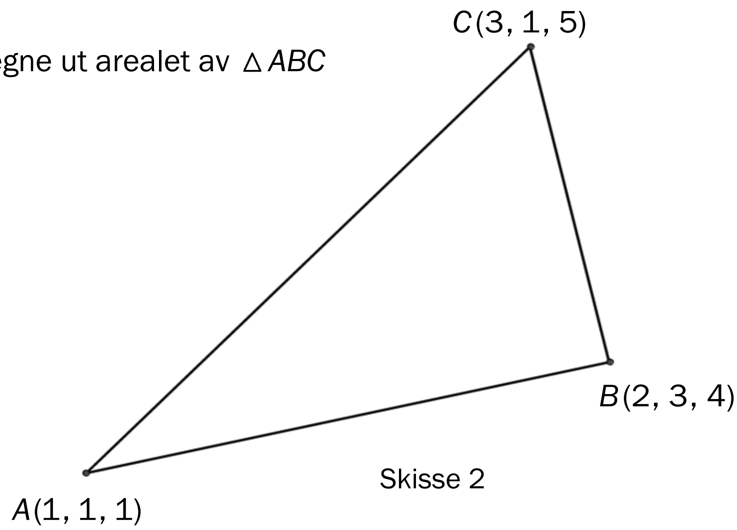
$$F=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

Kommenter hvert av de to tilfellene $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ og $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



Skisse 1

d) Bruk uttrykket i oppgave c) til å regne ut arealet av $\triangle ABC$ i skisse 2.



Skisse 2

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi har gitt rekken

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

a) Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene, og bestem hvor mange ledd vi må ta med for at S_n skal bli 1 600.

En uendelig rekke er gitt ved

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

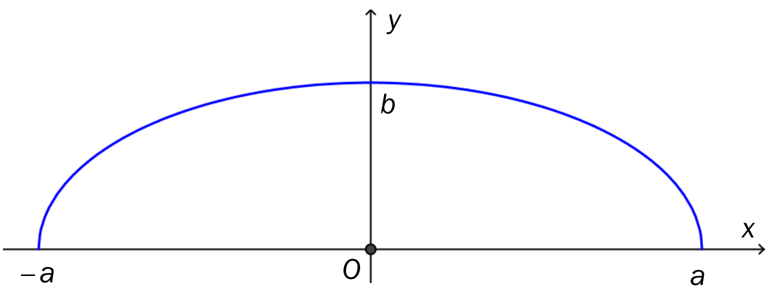
b) Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av rekken.

Oppgave 5 (4 poeng)

En såkalt *ellipse* med sentrum i origo O er gitt ved likningen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

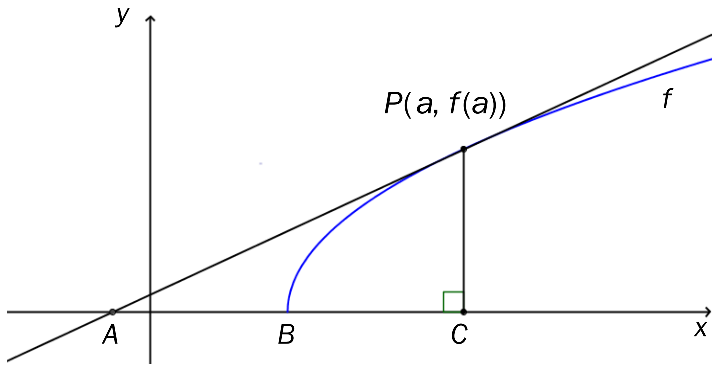
Hvis vi dreier øvre halvdel av ellipsen $360°$ om $x-$aksen, får vi et omdreiningslegeme som vi kaller en *ellipsoide*.



a) Vis at likningen for ellipsen kan omformes til $y^2=b^2-\dfrac{b^2x^2}{a^2}$

b) Bruk integrasjon for å vise at formelen for volumet av ellipsoiden er $\dfrac{4}{3}\pi a b^2$

Oppgave 6 (7 poeng)



Skissen ovenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

På skissen er det også tegnet inn tangenten til grafen i punktet $P(a, f(a))$.

a) Vis at likningen til tangenten er

$$y = \frac{1}{2\sqrt{a-2}}x + \frac{a-4}{2\sqrt{a-2}}$$

Bestem koordinatene til punktene A, B og C på figuren.

b) Vis at arealet av området som er avgrenset av grafen til f og x–aksen fra B til C er

$$\frac{2}{3}(a-2)^{\frac{3}{2}}$$

Bestem også arealet av $\triangle ACP$.

c) Grafen til f deler $\triangle ACP$ i to områder.
Vis at arealet til det ene området er dobbelt så stort som arealet til det andre.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet